Esercitazione n° 1 - 1 marzo 2006

Esercizi sul principio di induzione (prima forma).

- Dimostrare che
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Siano F_i numeri di Fibonacci. Provare che
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- Dimostrare che
$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$
per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

Esercizi sulle funzioni.

- Siano $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ due funzioni. Provare che:
  i) Se f e g sono iniettive allora anche $f \circ g$ è iniettiva.
  ii) Se f e g sono surgettive allora anche $f \circ g$ è surgettiva.
  iii) Se f e g sono bigettive allora anche $f \circ g$ è bigettiva.

- Si consideri la funzione
$$f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{se } n \text{ è pari;} \\ 2n - 1, & \text{se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$$
con $n \in \mathbb{N}$. Studiare se è iniettiva, surgettiva ed, eventualmente, trovare inversa sinistra e inversa destra.

Esercizi sugli insiemi.

- Dimostrare le *leggi di De Morgan*
$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$
con A e B contenuti in C.

- Dati gli insiemi A e B, dimostrare che
$$A \subseteq B \qquad \Longrightarrow \qquad (B \setminus A) \cap A = \emptyset \quad \text{e} \quad (B \setminus A) \cup A = B.$$

Esercitazione n° 2 - 15 marzo 2006

Esercizi sul principio di induzione (prima forma).

- Per ogni $n \in \mathbb{Z}^+$ si definisca
$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$$
e
$$S_n = \{T \subseteq [n] \mid T \text{ non contiene due interi consecutivi }\}.$$
Ricordando che la successione di Fibonacci è definita nella seguente maniera
$$F_0 = 1; \quad F_1 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$
si dimostri che
$$|S_n| = F_{n+1},$$
per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizi sugli insiemi finiti.

- In quanti modi si possono sistemare 8 torri su una scacchiera in modo tale che non si attacchino?
- Quante sono le funzioni iniettive $f\colon \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{0.1,2,3,4,5,6,7,8\}$? Quante sono quelle tali che $f(1) = 3$?
- Sia $f\colon \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \to \{0.1,2,3,4,5,6,7,8\}$ una funzione iniettiva. Cosa si può dire su $\left|f^{-1}(0)\right|$?

Esercizi sulla controimmagine di una funzione.

Sia $f\colon A \to B$ una funzione.
Si definisce *immagine* per f di $X \subset A$ il sottoinsieme di B così definito
$$f_*(X) = \{b \in B \mid b = f(x) \text{ per un certo } x \in X\}.$$
Quindi f induce la funzione $f_*\colon \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ che ad ogni sottoinsieme X di A associa il sottoinsieme di B definito da $f_*(X)$.
D'altra parte, ogni sottoinsieme $Y \subset B$ ha una *controimmagine* per f che è il sottoinsieme di A costituito da tutti gli elementi che vengono mandati in Y da f, cioè
$$f^*(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\},$$
e quindi f induce anche una funzione $f^*\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ che ad ogni sottoinsieme Y di B associa il sottoinsieme di A definito da $f^*(Y)$. Questo insieme e spesso chiamato anche *immagine inversa* di Y e indicato con $f^{-1}(Y)$ quando questo non genera confusione.

- Siano A e B due insiemi e consideriamo la funzione $f\colon A \to B$. Siano C e D sottoinsiemi di B. Dimostrare che:

  (1) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
  (2) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

- Siano A e B due insiemi e consideriamo la funzione $f\colon A \to B$. Dimostrare che:

  (1) f^* è iniettiva se e solo se f è suriettiva.
  (2) f^* è suriettiva se e solo se f è iniettiva ([1]).

[1]Questo punto l'ho dato da fare a casa e lo correggeremo la prossima volta.

Esercitazione n° 3 - 29 marzo 2006

Concetti teorici.

- Definizione di polinomio e grado di un polinomio.
- Definizione di divisibilità fra polinomi.
- **Teorema** [Teorema della divisione con resto fra polinomi]

  Dati due polinomi $a(x)$ e $b(x)$ non nulli, esiste una ed una sola coppia di polinomi $q(x)$ e $r(x)$ tali che
  $$a(x) = q(x)b(x) + r(x)$$
  con $r(x) = 0$ oppure $\deg(r(x)) < \deg(b(x))$.

  Dimostrazione (traccia).

  Dati due polinomi $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ e $b(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ con $a_n, b_m \neq 0$, se $n < m$ basta porre $q(x) = 0$ e $r(x) = a(x)$ e il teorema è dimostrato.

  Supponiamo quindi che sia $n > m$. Posto $q_1(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ si ha
  $$\begin{array}{r} a(x) - \\ b(x)q_1(x) = \\ \hline r_1(x) \end{array}$$
  dove $\deg(r_1(x)) \leqslant \deg(a(x))$. Se $\deg(r_1(x)) < \deg(b(x))$ abbiamo finito e si pone
  $$q(x) = q_1(x) \qquad \text{e } r(x) = r_1(x).$$
  Se $\deg(r_1(x)) \geqslant \deg(b(x)$ si va avanti. Supponendo che sia $r_1(x) = c_s x^s + c_{s-1}x^{s-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, ponendo $q_2(x) = \frac{c_s}{b_m}x^{n-m}$ si ha
  $$\begin{array}{r} r_1(x) - \\ b(x)q_2(x) = \\ \hline r_2(x) \end{array}$$
  dove $\deg(r_2(x)) < \deg(r_1(x))$. Se $\deg(r_2(x)) < \deg(b(x))$ abbiamo finito e si pone
  $$q(x) = q_1(x) + q_2(x) \qquad \text{e } r(x) = r_2(x).$$
  Se invece $\deg(r_2(x)) \geqslant \deg(b(x)$ si va avanti. Siccome il grado del polinomio $r_q(x)$ decresce ci sarà un p per cui sia avrà
  $$\begin{array}{r} r_{p-1}(x) - \\ b(x)q_p(x) = \\ \hline r_p(x) \end{array}$$
  con $\deg(r_p(x)) < \deg(b(x))$. Se si pone
  $$r(x) = r_p(x) \qquad \text{e} \qquad q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \ldots + q_p(x),$$
  si avrà
  $$a(x) = b(x)q(x) + r(x) \qquad \text{con} \qquad r(x) = 0 \text{ oppure } \deg(r(x)) < \deg(b(x)).$$

- Coppie di polinomi $f(x)$ e $g(x)$ tali che $f(x) \mid g(x)$ e $g(x) \mid f(x)$.
- Algoritmo di Euclide ed algoritmo di Euclide esteso per polinomi.

Esercizi sui polinomi e sull'algoritmo di Euclide.

- Dati i polinomi $a(x) = 4x^5 - 6x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 2x - 3$ e $b(x) = x^2 - x - 2$ trovare il quoziente $q(x)$ e il resto $r(x)$ della divisione di $a(x)$ per $b(x)$ utilizzando l'algoritmo della divisione tra polinomi già noto. Risolverlo anche seguendo la traccia della dimostrazione del teorema della divisione.
- Utilizzando l'algoritmo di Euclide trovare il MCD dei polinomi $a(x)$ e $b(x)$ del punto precedente ed esprimerlo come loro combinazione lineare.
- Utilizzando l'algoritmo di Euclide esteso razionalizzare il denominatore nelle seguenti espressioni:

  (1)
  $$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}.$$

  (2)
  $$\frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 2}.$$

  (3) (Per casa)
  $$\frac{1}{\sqrt[4]{9} + 2\sqrt[4]{3} + 2}$$
  [Risultato: $(\sqrt[4]{9} - 2\sqrt[4]{3} + 2)/7$].

  (4) (Per casa)
  $$\frac{1}{\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} + 8}$$
  [Risultato: $(\sqrt[3]{4} - 22\sqrt[3]{2} + 58)/426$].

Esercitazione n° 4 - 5 aprile 2006

Esercizi sull'algoritmo di Euclide.

- Avendo a disposizione solo uno strumento che misura angoli di 30° e di 45° come si può disegnare un angolo di $\pi/12$?
- Facendo uso dell'algoritmo di Euclide esteso calcolare i seguenti integrali:

  (1)
  $$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

  (2) (Per casa)
  $$\int \frac{1}{(x^4-1)} dx.$$

  [Risultato: $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x$].

Esercizi sulle equazioni diofantee lineari

Si dicono *diofantee* quelle equazioni algebriche in una o più incognite che hanno per coefficienti numeri interi e delle quali interessano esclusivamente le eventuali soluzioni intere.
L'equazione diofantea più semplice è quella lineare della forma

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Si può dimostrare che questa equazione ammette soluzioni intere se e solo se il massimo comun divisore $d = (a, b)$ di a e b divide c.
Qualora sia risolubile questo tipo di equazione diofantea ammette infinite soluzioni. Se (x_0, y_0) è una generica soluzione e si determinano a' e b' tali che $a = da'$ e $b = db'$, l'insieme delle soluzioni sarà dato dalla coppia $(x_0 + b'k, y_0 - a'k)$ al variare di k in $\mathbb{Z}$.

- Risolvere le seguenti equazioni diofantee:

  (1)
  $$74x + 22y = 10 \qquad \text{e} \qquad 74x + 22y = 9.$$

  (2) (Per casa)
  $$441x + 119y = 28 \qquad \text{e} \qquad 441x + 119y = 29.$$

  [Risultato: $(-28 + 17k, 104 - 63k)$, $k \in \mathbb{Z}$].

- Disponendo di francobolli da 36 e da 45 centesimi, è possibile affrancare un pacco da 2 euro e 34 centesimi? E un pacco da 3 euro e 34 centesimi?

Esercizi sui sistemi di congruenze

- Risolvere i seguenti sistemi di congruenze:

  (1)
  $$\begin{cases} x \equiv 28 \pmod{45} \\ x \equiv 46 \pmod{18} \end{cases}$$

(2) (Per casa)

$$\begin{cases} x \equiv -3 \pmod{35} \\ x \equiv 22 \pmod{25} \end{cases}$$

[Risultato: $x \equiv -3 \pmod{175}$].

- Trovare il più piccolo numero intero che dia resto 4 quando viene diviso per 5 e per 7 e che dia resto 7 quando viene diviso per 9.
- Trovare il più piccolo numero intero che dia resto 1 quando viene diviso per 11, resto 2 quando viene diviso per 12 e resto 3 quando viene diviso per 13.
- Risolvere il seguente sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Esercitazione n° 5 - 10 maggio 2006

Elementi di calcolo combinatorio

Sia A un insieme e sia $k \in \mathbb{N}$. Denoteremo con $\begin{pmatrix} A \\ k \end{pmatrix}$ l'insieme dei sottoinsiemi di A costituiti da k elementi, vale a dire

$$\begin{pmatrix} A \\ k \end{pmatrix} = \{X \subset A \mid |X| = k\}.$$

Se $|A| = n$ con $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ indichiamo il numero di sottoinsiemi di A che hanno k elementi vale a dire

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \left| \begin{pmatrix} A \\ k \end{pmatrix} \right|.$$

Il simbolo $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ si legge "n su k" e viene detto *coefficiente binomiale* per un motivo che sarà chiaro più avanti. E' chiaro che $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ ha senso per coppie di interi non negativi e che quando $n < k$ questo è uguale a zero.

Si può dimostrare che

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{1}$$

con $0! = 1$. Chi ha già avuto a che fare con i coefficienti binomiali potrà dedurre dalla (1) che $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ rappresenta il numero di combinazioni semplici di n elementi presi k alla volta.

Osservazione. Le formule incontrate in questa breve trattazione sui coefficienti binomiali potrà essere dimostrata a partire dalla (1) e dalle formule che da essa deriveranno. Essendo però un buon esercizio, forniremo, per alcuni risultati, anche la dimostrazione fatta a partire dalla definizione.

Dalla (1) segue immediatamente che

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{2}$$

infatti si ha

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Segue immediatamente che

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix},$$

ma questa relazione si ricava velocemente anche usando la definizione. Infatti ogni volta che, dato un insieme con n elementi, prendiamo un suo sottoinsieme di k elementi, possiamo costruirne un altro con i restanti $n-k$ elementi, e quindi vi sono tanti sottoinsiemi con k elementi di quanti ce ne sono con $n-k$.
Si vede facilmente anche che:

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1.$$

Questa è immediata se si pensa che ogni insieme con n elementi ha esattamente un solo sottoinsieme con 0 elementi, l'insieme vuoto, e un solo sottoinsieme con n elementi, che coincide con l'insieme stesso. Applicando la (2) la dimostrazione è ugualmente immediata.

Distribuiamo ora i coefficienti binomiali disponendoli in una tabella in modo tale che $\binom{n}{k}$ occupi l'intersezione tra la n-esima riga e la k-esima colonna, e tralasciando i coefficienti binomiali nulli

$$
\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\
\vdots & & & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Sviluppando i calcoli si ottiene il famoso *Triangolo di Tartaglia* che veniva utilizzato per determinare i coefficienti dello sviluppo di una potenza di un dato binomio:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

Nel triangolo ogni elemento è ottenuto dalla somma del numero che gli sta immediatamente sopra con quello che precede quest'ultimo nella stessa riga. Questo si traduce, in termini di coefficienti binomiali, con la seguente formula di ricorrenza:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{3}$$

La (3) può essere dimostrata ragionando come segue: fissiamo l'attenzione su un elemento a di A e sia A' l'insieme ottenuto togliendo a da A. Possiamo suddividere i sottoinsiemi di A che hanno k elementi in due gruppi:

- quelli che contengono a;

- quelli che non contengono a.

Ciascuno di questi ultimi può essere riguardato come un sottoinsieme di k elementi di A' e viceversa. Pertanto il secondo gruppo contiene esattamente $\binom{n-1}{k}$ elementi. D'altra

parte per poter contare gli elementi del primo gruppo possiamo immaginare di togliere a da ciascuno dei suoi sottoinsiemi, in questo modo si ottengono tutti e solo i sottoinsiemi con $k-1$ elementi di A' che sono $\binom{n-1}{k-1}$. E quindi la (3) è provata.
La formula si può dimostrare anche utilizzando la (2) nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{(n-1)!(n-k)+(n-1)!k}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}\end{aligned}$$

Come già ricordato, i coefficienti che compaiono nella n-esima riga del Triangolo di Tartaglia sono gli stessi che compaiono nello sviluppo della potenza n-esima del binomio $(x+y)^n$ (questo giustifica il nome "coefficiente binomiale") e quindi si avrà:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}x^ny^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}.$$

La formula

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}. \tag{4}$$

è nota come *formula di Newton*.
Per dimostrarla si può ricorrere all'induzione matematica.
Si vede facilmente che per $n=0$ la (4) è verificata. Supponiamola quindi vera per n e dimostriamola per $n+1$.
Avremo

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n=(x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k+1}$$

Ponendo nella prima sommatoria $j=k+1$, e quindi $k=j-1$, nella seconda direttamente $j=k$, sfruttando la (3) e il fatto che $\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1$ e $\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}=1$, si ha

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}x^jy^{n-j+1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^jy^{n-j+1}=\\ &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}x^jy^{n-j+1}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^jy^{n-j+1}+\binom{n}{n}x^{n+1}y^0+\binom{n}{0}x^0y^{n+1}=\\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\binom{n}{j-1}+\binom{n}{j}\right]x^jy^{n-j+1}+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0+\binom{n+1}{0}x^0y^{n+1}=\\ &= \sum_{j=1}^{n}\binom{n+1}{j}x^jy^{n-j+1}+\binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0+\binom{n+1}{0}x^0y^{n+1}=\\ &= \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}x^jy^{n-j+1}.\end{aligned}$$

Come volevasi dimostrare.

Direttamente dal formula del binomio di Newton seguono due importanti risultati:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0,$$

in altre parole, la somma degli elementi che stanno sulla n-esima riga del triangolo di Tartaglia è 2^n mentre la loro somma a segni alterni è zero.
Infatti, si ha che:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k1^{n-k}=(1+1)^n=2^n \quad (5)$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k1^{n-k}=(-1+1)^n=0 \quad (6)$$

Osservazione. La (5) si vede facilmente. Infatti, sommare il numero di sottoinsiemi con 0 elementi, il numero di sottoinsieme con 1 elementi, quelli con 2 elementi, e così via, fino al numero di sottoinsiemi con n elementi, significa contare il numero di sottoinsiemi dell'insieme di partenza e quindi la cardinalità dell'insieme delle parti che è, come ben noto, esattamente 2^n.
Per quanto riguarda la (6) si può invece osservare che è intuitiva solo se n è dispari. Infatti, per n dispari, gli addendi $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{n-k}$ risultano uguali e opposti e quindi si semplificano tra loro per ogni k. Il fatto invece che la somma sia nulla anche per n pari non è altrettanto intuitivo.

Esercizio (da fare a casa)**.** Sia A un insieme di cardinalità 7 e $B, C \subset A$ tali che $|B| = 2$ e $|C| = 3$. Calcolare:

(a) Il numero di sottoinsiemi di A disgiunti a B.

(b) Il numero di sottoinsiemi di A che contengono B.

(c) Il numero di sottoinsiemi di A che hanno in comune esattamente un elemento con B.

(d) Il numero di sottoinsiemi di A che hanno in comune esattamente 2 elementi con C.

Rifare lo stesso esercizio supponendo che A abbia cardinalità 8.

Esercitazioni n° 6 e 7 - 22 e 24 maggio 2006

Elementi di teoria dei grafi

Definizione. Un *grafo* G è costituito da un insieme V, i cui elementi sono chiamati *vertici*, e da un insieme E composto da sottoinsiemi di ordine 2 di V, i cui elementi sono detti *archi* o *lati*. Si scrive usualmente $G = (V, E)$.

Abbiamo quindi che $E \subseteq \binom{V}{2}$ ricordando che con $\binom{V}{2}$ possiamo indicare l'insieme di tutti i sottoinsiemi di V costituiti da 2 elementi.

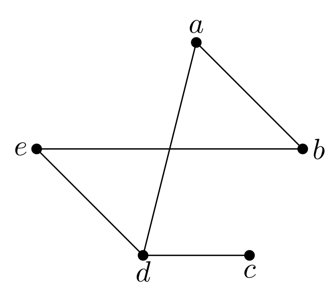
Osservazione. In questo contesto consideriamo solo grafi con un numero finito di vertici e tali che E non contenga elementi del tipo $\{u, u\}$ per ogni $u \in V$.

Se $\{u, v\} \in E$, vale a dire se esiste un arco che collega u e v Si dice allora che u e v sono *adiacenti* in G.

Esempio. Un esempio di grafo è il seguente

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}.$$

La definizione risulta più chiara se si disegna il grafo. Un possibile disegno è il seguente:

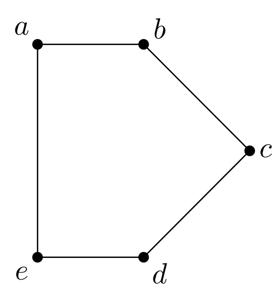


Grafo G_1

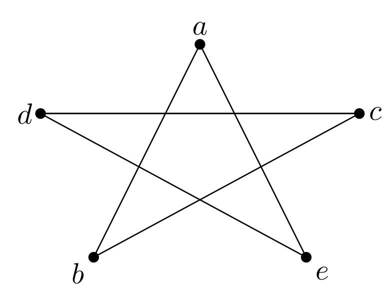
Osservazione. Il disegno di un grafo è importante ma occorre stare attenti in quanto lo stesso grafo può essere disegnato in modi diversi. Per esempio, se consideriamo il grafo così definito

$$V = \{a, b, c, d, e\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, e\}\},$$

questo può essere rappresentato con i due seguenti disegni:



Grafo G_2



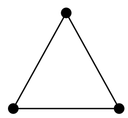
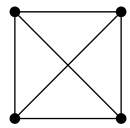
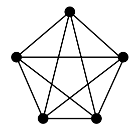
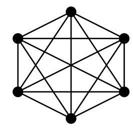
Grafo G_3

Definiamo ora alcuni importanti tipi di grafi.

- *Grafi completi* K_n. Sono i grafi in cui

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{e} \qquad E = \binom{V}{2}.$$

  Per esempio si ha

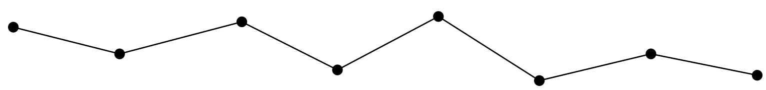





Grafo K_3 Grafo K_4 Grafo K_5 Grafo K_6

- *Percorsi o cammini* P_n. Sono i grafi in cui

$$V = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{e} \qquad E = \{\{i-1, i\} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

  Per esempio

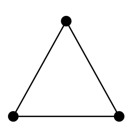
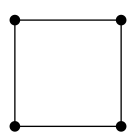
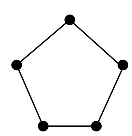
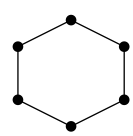


Grafo P_7

- *Cicli* C_n. Sono i grafi in cui

$$V = \{1, 2, \ldots, n\} \qquad \text{e} \qquad E = \{\{i, i+1\} \mid i = 1, 2, \ldots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\}.$$

  Per esempio si ha

Grafo C_3 Grafo C_4 Grafo C_5 Grafo C_6

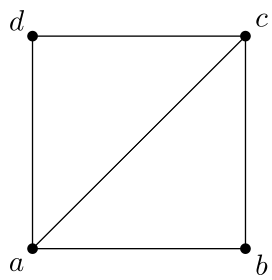
Grafi isomorfi

Definizione. Due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ sono detti *isomorfi* se esiste una bigezione f da V in V' tale che

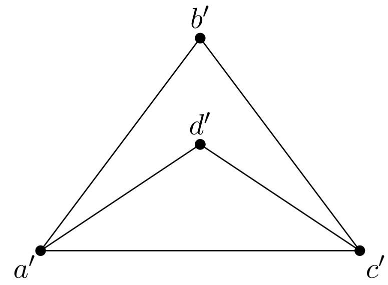
$$\{u, v\} \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad \{f(u), f(v)\} \in E'$$

per ogni $u, v \in V$ con $u \neq v$, e si scrive $G \cong G'$. La funzione f viene detta *isomorfismo* tra i grafi G e G'.

Esempio. I grafi in figura sono isomorfi.



Grafo G_4

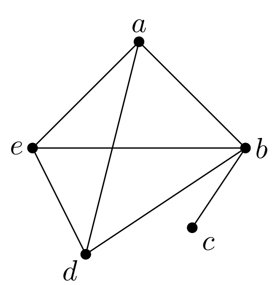


Grafo G_5

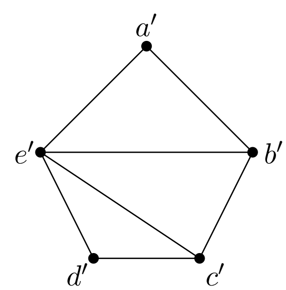
e un isomorfismo è dato da

$$\begin{array}{ccc} a & \longmapsto & a' \\ b & \longmapsto & b' \\ c & \longmapsto & c' \\ d & \longmapsto & d'. \end{array}$$

Al contrario, i due grafi nella seguente figura non sono isomorfi.



Grafo G_6

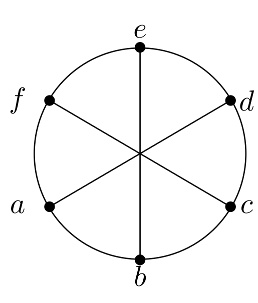


Grafo G_7

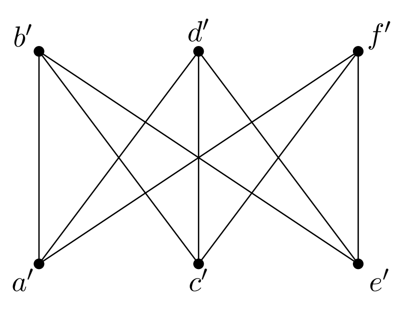
Entrambi hanno cinque vertici e sette lati ma questo non basta. Per vedere che non sono isomorfi si può osservare, ad esempio, che i vertici $\{a, b, d, e\}$ di G_6 formano un grafo completo K_4 mentre in G_7 non è contenuto alcun grafo completo K_4.

Nel seguito verranno analizzati nuovi metodi per verificare se due grafi sono tra loro isomorfi o meno.

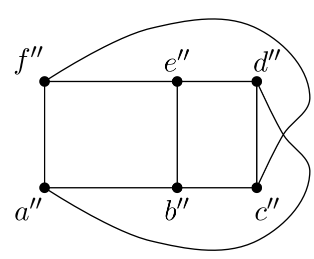
Esempio. La figura seguente mostra tre grafi isomorfi.



Grafo G_8



Grafo G_9

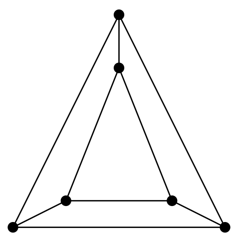


Grafo G_{10}

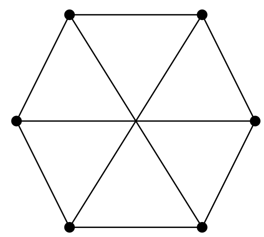
abbiamo gli isomorfismi

$$
\begin{array}{ccc}
a \longmapsto a' & a \longmapsto a'' & a' \longmapsto a'' \\
b \longmapsto b' & b \longmapsto b'' & b' \longmapsto b'' \\
c \longmapsto c' & c \longmapsto c'' & c' \longmapsto c'' \\
d \longmapsto d' & d \longmapsto d'' & d' \longmapsto d'' \\
e \longmapsto e' & e \longmapsto e'' & e' \longmapsto e'' \\
f \longmapsto f' & f \longmapsto f'' & f' \longmapsto f''.
\end{array}
$$

Esercizio (Per casa)**.** Stabilire se i grafi in figura sono o meno isomorfi tra loro.



Grafo G_{11}

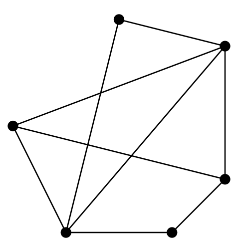


Grafo G_{12}

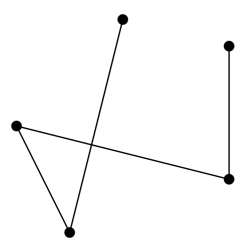
Sottografi e sottografi indotti

Definizione. Siano $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ due grafi. Si dice che G è un *sottografo* di G' se $V \subseteq V'$ e $E \subseteq E'$.

Esempio. La seguente figura mostra un esempio di sottografo di un grafo



Grafo G'_{13}

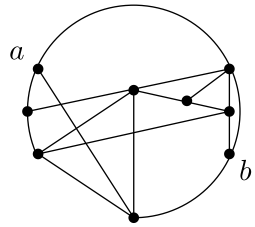


Grafo G_{13}

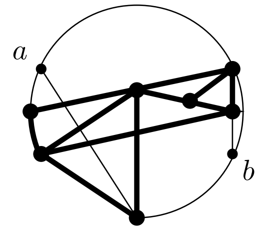
Definizione. Si dice che $G = (V, E)$ è un *sottografo indotto* di un grafo $G' = (V', E')$ se $V \subseteq V'$ e $E = E' \cap \begin{pmatrix} V \\ 2 \end{pmatrix}$.

In altre parole, un sottografo indotto di un grafo G' è un grafo G che si ottiene cancellando alcuni vertici di G' e tutti gli archi che contengono il vertice cancellato.

Esempio. La seguente figura mostra un esempio di sottografo indotto di un grafo



Grafo G'_{14}



Grafo G_{14}

dove il grafo G_{14} è ottenuto facendo $G'_{14} \setminus \{a, b\}$.

Score di un grafo

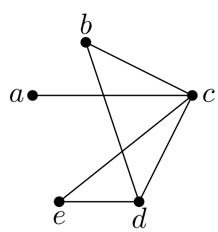
Sia G un grafo, e sia v un vertice di G. Il numero di archi di G contenenti il vertice v è denotato con $\deg_G(v)$ e chiamato *grado* di v nel grafo G.
Denotiamo i vertici di G con $v_1, v_2, \ldots, v_n$. La sequenza

$$d = (\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \ldots, \deg_G(v_n))$$

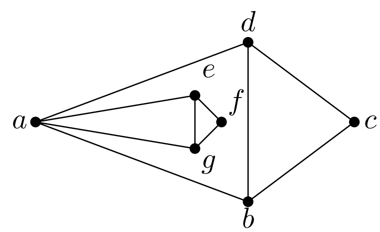
è detta *score* di G.

Scriviamo di solito lo score mettendo i numeri in ordine crescente (a meno di risistemarli).

Per esempio lo score dei seguenti grafici:



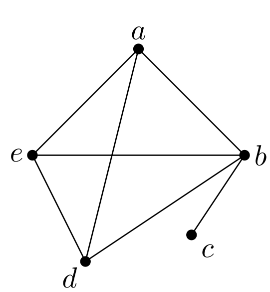
Grafo G_{15}



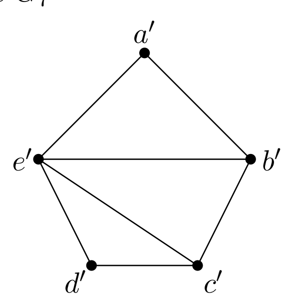
Grafo G_{16}

è rispettivamente $d_1 = (1, 2, 4, 3, 2) = (1, 2, 2, 3, 4)$ e $d_2 = (4, 3, 2, 3, 3, 2, 3) = (2, 2, 3, 3, 3, 3, 4)$.
E' facile vedere che due grafi isomorfi hanno lo stesso score, così come due grafi con differente score sono sicuramente non isomorfi.

Esempio. Abbiamo dimostrato che i grafi G_6 e G_7



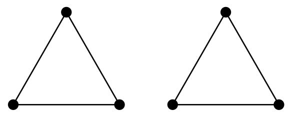
Grafo G_6



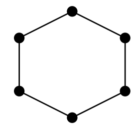
Grafo G_7

non sono isomorfi. Questo si può vedere anche considerando che lo score di G_6 è $d = (1, 2, 3, 3, 3)$ mentre quello di G_7 è $d = (1, 2, 3, 3, 4)$.

D'altra parte, grafi con lo stesso score non sono necessariamente isomorfi! Per esempio i grafi



Grafo G_{17}



Grafo G_{18}

hanno entrambi score $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$ ma non sono isomorfi perche uno di loro è connesso mentre l'altro non lo è.
Lo score quindi è un'importante caratteristica del grafo e può spesso aiutare a distinguere grafi non isomorfi nella pratica.

Si noti che non sempre una sequenza di numeri del tipo $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ rappresenta lo score di un grafo.
Se per esempio prendiamo

$$d = (1, 1, 1, 5, 6, 7, 7)$$

questa non rappresenta lo score di un grafo. Infatti se esistesse un tale grafo avrebbe 7 vertici e ognuno di questi avrebbe al massimo grado 6. Nella sequenza invece ci sono anche numeri superiori a 6 e quindi d non rappresenta lo score di alcun grafo.

Vale inoltre la seguente Proposizione.

Proposizione. *Per ogni grafo $G = (V, E)$ si ha*

$$\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2\,|E|\,.$$

Da questo segue un importante Corollario.

Corollario (Lemma delle strette di mano)**.** *In ogni grafo, il numero di vertici di grado dispari è pari.*

Per esempio, il grafo G_{15} ha due vertici di grado dispari, mentre il grafo G_{16} ha quattro vertici di grado dispari.

Esempio. Per esempio

$$d = (1, 1, 1, 3, 5, 6, 7, 7),$$

non può essere lo score di un grafo perché non esiste un grafo con sette vertici di grado dispari.

Il Lemma delle strette di mano ed altre condizioni necessarie non sono però sufficienti a caratterizzare sequenze che possono essere score di grafi.

Il seguente Teorema invece permette di stabilire se una data sequenza di interi è lo score di una grafo oppure no e in caso affermativo fornisce un algoritmo che consente di costruire un grafo ad esso associato.

Teorema (Teorema dello score)**.** Sia $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ una sequenza di numeri naturali, $n > 1$. Supponiamo che $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots \leqslant d_n$, e con il simbolo d' denotiamo la sequenza $(d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ dove

$$d'_i = \begin{cases} d_i, & \text{per } i < n - d_n; \\ d_i - 1, & \text{per } i \geqslant n - d_n. \end{cases}$$

Allora d è lo score di un grafo se e solo se d' è lo score di un grafo.

Facciamo ore due esercizi che mostrano come questo importante Teorema agisce.

Esercizio. Sia $d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$. Provare che esiste un grafo G lo score di G è d e determinarne uno.

Soluzione. Innanzitutto notiamo che ci sono 4 vertici di grado dispari (e quindi un numero pari) e quindi possiamo andare avanti.
Applichiamo il teorema dello score. Avremo

$$d = (2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 6)$$

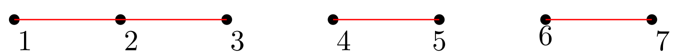
quindi $n = 9$ e $d_n = 6$. Poiché $n - d_n = 3$ avremo

$$d' = (2, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 4) = (1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 4).$$

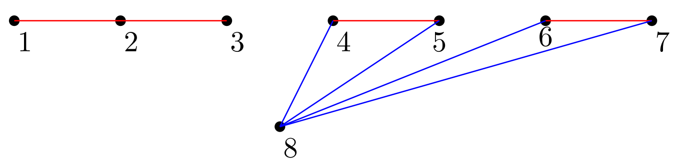
Il numero di vertici di grado dispari è ancora pari quindi possiamo andare avanti. Avremo $n = 8$, $d_n = 4$ quindi $n - d_n = 4$ e allora

$$d'' = (1, 1, 2, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 2)$$

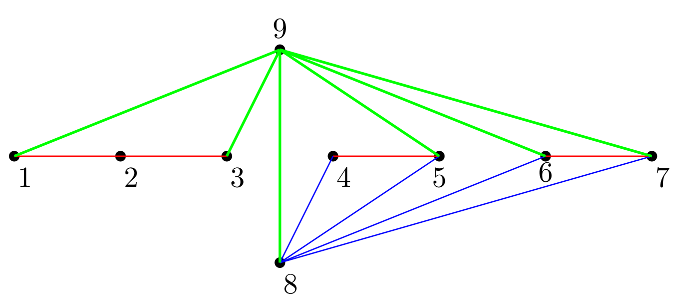
che rappresenta sicuramente lo score del seguente grafo



e quindi, per il teorema dello score, anche d è lo score di un grafo che può essere costruito a partire dal grafo relativo a d''. Infatti anche d' sarà lo score di un grafo che può essere ottenuto a partire da quello relativo a d'' considerando che va aggiunto un ottavo vertice che sarà adiacente a quattro dei sette vertici disegnati, in modo che due tra questi vertici rimangano di grado 1 e quello di grado 2 resti di grado 2. Uno dei possibili grafi è il seguente.



Infine da questo nuovo grafo possiamo ottenere un grafo con score d aggiungendo un vertice e collegandolo a sei dei precedenti otto vertici in modo che quello di grado 4 diventi di grado 5, i due vertici di grado 1 diventino di grado 2, e tre tra quelli di grado 2 diventino di grado 3. Uno dei possibili gradi ottenibili è il seguente.



♣

Esercizio. Sia $d = (2,2,2,2,3,3,3,5,5,8,8)$. Provare che esiste un grafo G lo score di G è d e determinarne uno.

Soluzione. Innanzitutto notiamo che ci sono 4 vertici di grado dispari e quindi possiamo andare avanti.
Applichiamo il teorema dello score controllando che dopo ogni passo il numero di vertici dispari risulti sempre un numero pari. Per

$$d = (2,2,2,2,3,3,3,5,5,8,8)$$

avremo

$$\left.\begin{array}{l} n = 10 \\ d_n = 8 \end{array}\right\} \implies n - d_n = 2 \implies \begin{array}{rcl} d' & = & (2,1,1,1,2,2,4,4,7) \\ & = & (1,1,1,2,2,2,4,4,7) \end{array}$$

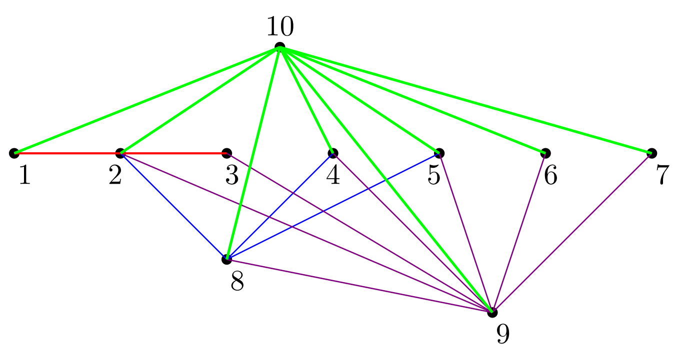
Il numero di vertici dispari è 4 quindi possiamo andare avanti. Avremo

$$\left.\begin{array}{l} n = 9 \\ d_n = 7 \end{array}\right\} \implies n - d_n = 2 \implies \begin{array}{rcl} d'' & = & (1,0,0,1,1,1,3,3) \\ & = & (0,0,1,1,1,1,3,3) \end{array}$$

Il numero di vertici dispari è 6 quindi possiamo andare avanti. Avremo

$$\left.\begin{array}{l} n = 8 \\ d_n = 3 \end{array}\right\} \implies n - d_n = 5 \implies \begin{array}{rcl} d''' & = & (0,0,1,1,0,0,2) \\ & = & (0,0,0,0,1,1,2) \end{array}$$

Il numero di vertici dispari è 2, il grado massimo della sequenza è 2, quindi abbiamo finito e possiamo costruire un grafo.



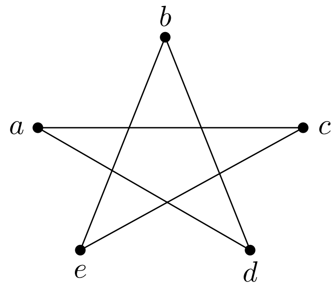
♣

Grafi connessi, 2-connessi ed Hamiltoniani

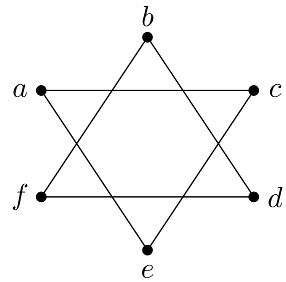
Diamo ora alcune definizioni che risulteranno utili per verificare se due grafi sono isomorfi o meno.

Definizione. Un grafo $G = (V, E)$ è detto *connesso* se per ogni coppia di vertici $u, v \in V$, G contiene un percorso da u a v.

Esempio. Si osservi la seguente figura.



Grafo G_{19}

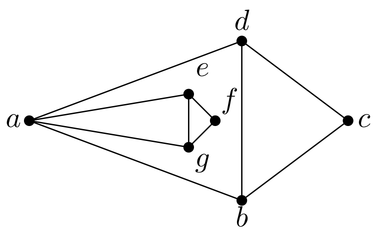


Grafo G_{20}

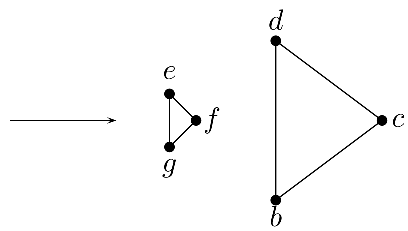
Si vede facilmente che il grafo G_{19} è connesso. Il grafo G_{20} invece non è connesso. Infatti, per esempio, non è possibile trovare in G_{20} alcun percorso che contenga i vertici a e b.

Definizione. Un grafo G è detto 2-*connesso* se ha almeno 3 vertici, e cancellando ogni singolo vertice otteniamo un grafo connesso.

Esempio. Il grafo G_{16} non è 2-connesso.
Infatti se si cancella il vertice $\{a\}$ si ottiene un grafo costituito da due cicli

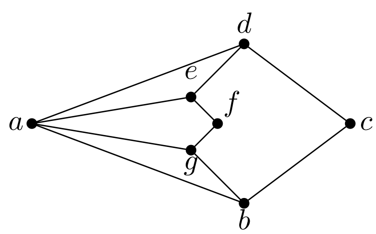


Grafo G_{16}



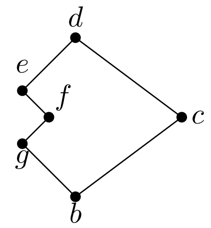
Grafo $G_{16} \setminus \{a\}$

Esercizio. Dire se è 2-connesso il seguente grafo.

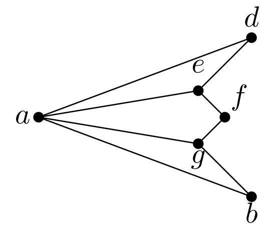


Grafo G_{21}

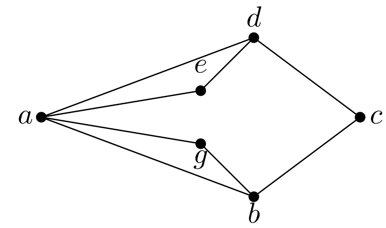
Soluzione. Verifichiamo se cancellando ogni singolo vertice otteniamo un grafo connesso. Avremo



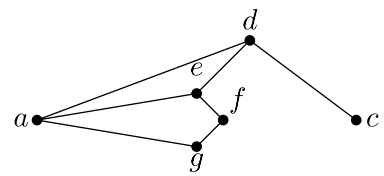
Grafo $G_{21} \smallsetminus \{a\}$



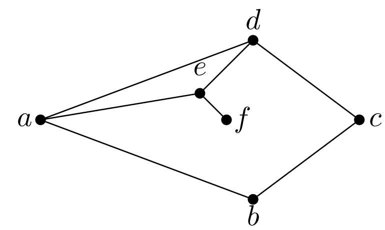
Grafo $G_{21} \smallsetminus \{c\}$



Grafo $G_{21} \smallsetminus \{f\}$



Grafo $G_{21} \smallsetminus \{b\}$



Grafo $G_{21} \smallsetminus \{g\}$

Il caso $G_{21} \smallsetminus \{d\}$ è analogo al caso $G_{21} \smallsetminus \{b\}$ mentre il caso $G_{21} \smallsetminus \{e\}$ è analogo a quello di $G_{21} \smallsetminus \{g\}$.
E quindi abbiamo analizzato ogni possibilità e abbiamo ottenuto in ogni caso dei sottografi indotti connessi. Segue che G_{21} è 2-connesso. ♣

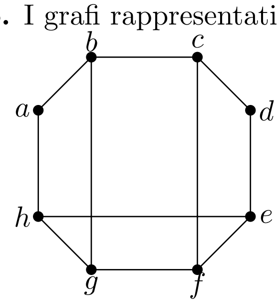
Diamo ora un'altra importante definizione.

Definizione. Un *ciclo Hamiltoniano* in un grafo G è un ciclo contenente tutti i vertici di G. Si dice in questo caso che il grafo è *Hamiltoniano*.

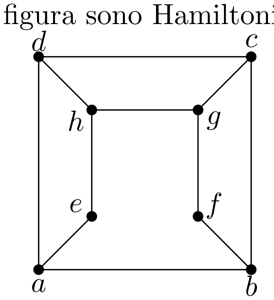
Esempio. Il grafo G_{27} è Hamiltoniano.
Infatti si può vedere dalla figura che contiene il ciclo

$$a \dashrightarrow b \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow a.$$

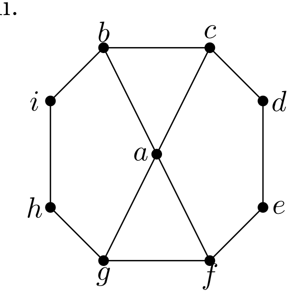
Esercizio. I grafi rappresentati in figura sono Hamiltoniani.



Grafo G_{22}



Grafo G_{23}



Grafo G_{24}

Indicare per ognuno di questi un ciclo che contenga tutti i vertici.

Soluzione.

- Il grafo G_{22} contiene sicuramente il ciclo completo

$$a \dashrightarrow b \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow h \dashrightarrow a$$

  ma anche il ciclo completo

$$h \dashrightarrow a \dashrightarrow b \dashrightarrow g \dashrightarrow f \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow h.$$

- Il grafo G_{23} contiene il ciclo completo

$$e \dashrightarrow a \dashrightarrow d \dashrightarrow c \dashrightarrow b \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow h \dashrightarrow e.$$

- Il grafo G_{24} contiene il ciclo completo

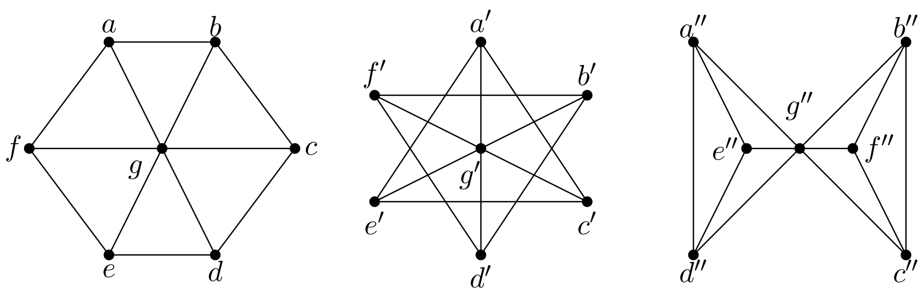
$$a \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow h \dashrightarrow i \dashrightarrow b \dashrightarrow a.$$

$\clubsuit$

Non potendo addentrarci troppo nei dettagli riportiamo solo alcuni utili risultati:

- Un grafo 2-connesso è anche connesso.
- Un grafo Hamiltoniano è 2-connesso.

Esercizio. Dei tre grafi rappresentati in figura



Grafo G_{25} Grafo G_{26} Grafo G_{27}

dire, motivando la risposta, quali sono tra loro isomorfi e quali no.

Soluzione.
Il grafo G_{25} è Hamiltoniano, infatti contiene il ciclo completo

$$a \dashrightarrow b \dashrightarrow c \dashrightarrow d \dashrightarrow e \dashrightarrow f \dashrightarrow g \dashrightarrow a$$

e quindi, in particolare, è 2-connesso.
Il grafo G_{27} non è 2-connesso. Infatti se a questo togliamo il vertice g'' otteniamo i due cicli $\{a'', d'', e''\}$ e $\{b'', c'', f''\}$. Lo stesso capita per il grafo G_{26} quando togliamo il vertice g'.
Quindi la prima conclusione è che G_{25} non è isomorfo né a G_{26} e né a G_{27}.
D'altra parte G_{26} e G_{27} sono tra loro isomorfi. Osservandoli si vede che g' gioca il ruolo di g'' rispettivamente, e si possono mettere in corrispondenza i triangoli di vertici $\{a', c', e'\}$ e $\{b', d', f'\}$ di G_{26} con i triangoli di vertici $\{a'', d'', e''\}$ e $\{b'', c'', f''\}$.
Un possibile isomorfismo è quindi il seguente:

$$\begin{array}{ccc}
a' & \longmapsto & a'' \\
c' & \longmapsto & d'' \\
e' & \longmapsto & e'' \\
b' & \longmapsto & b'' \\
d' & \longmapsto & c'' \\
f' & \longmapsto & f'' \\
g' & \longmapsto & g''.
\end{array}$$

$\clubsuit$

Esercitazione n$^\circ$ 8 - 31 maggio 2006

Esercizi sulle congruenze
Un elemento a è *invertibile* modulo n se e solo se $(a, n) = 1$. Indichiamo l'*inverso* col simbolo $[a]_n^{-1}$.

- Trovare, se esiste, l'inverso di 33 modulo 348.
- Trovare, se esiste, l'inverso di 35 modulo 348.

Saper calcolare l'inverso di un numero a modulo un certo n permette di risolvere congruenze del tipo

$$ax \equiv b \pmod{n}$$

qualora queste siano compatibili.

Una congruenza di questo tipo ha soluzione se e solo se il massimo comun divisore (a, n) divide n.

- Trovare, se esiste, la soluzione della congruenza

$$3x \equiv 10 \pmod{6}.$$

- Trovare, se esiste, la soluzione della congruenza

$$3x \equiv 5 \pmod{7}.$$

  Trovare, se esiste, la soluzione della congruenza

$$18x \equiv 12 \pmod{30}.$$

- Risolvere, se è compatibile, il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{9} \\ 9x \equiv 6 \pmod{12}. \end{cases}$$

- Risolvere, se è compatibile, il seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 18x \equiv 12 \pmod{30} \\ 7x \equiv 4 \pmod{9} \\ 28x \equiv 14 \pmod{98}. \end{cases}$$

- Calcolare

$$2^{294} \pmod{60}.$$

Esercizi sul calcolo combinatorio

- Trovare il numero di anagrammi della parola DISCRETA.
- Trovare il numero di anagrammi della parola MATTAREI.
- Avendo un alfabeto di 26 lettere si deve creare una password composta da 5 lettere anche ripetute seguite da 3 cifre distinte. Quante possibili password si possono creare?

- Quante diagonali ha un poligono di 10 lati?
- Un gruppo di 20 persone viene suddiviso in 5 gruppi da 4 elementi ciascuno. In quanti modi è possibile che si dispongano le persone?
- In quanti modi si possono scegliere 5 numeri diversi da 1 a 10 in modo che la loro somma sia un numero pari?
- Dire per quali valori di $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} > 2n.$$

Ecco alcuni esercizi aggiuntivi con soluzione.

Esercizio 1. Quante partite a scacchi diverse possono essere giocate da 6 giocatori?

Soluzione. Tenendo conto che ogni giocatore deve sfidare ogni altro giocatore saranno

$$\binom{6}{2}.$$

♣

Esercizio 2. In un convegno con 21 partecipanti, ognuno di questi stringe la mano ad ogni altro partecipante. Quante sono le strette di mano?

Soluzione. Saranno

$$\binom{21}{2}.$$

♣

Esercizio 3. Sia $E = \{1, 2, \ldots, 30\}$. Quanti sono i sottoinsiemi di E formati da quattro elementi due dei quali divisibili per 3 oppure per 7 e gli altri due non divisibili né per 3 né per 7?

Soluzione. Poniamo

$$A = \{x \in E \mid 3 \text{ divide } x\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x \in E \mid 7 \text{ divide } x\}.$$

Avremo $|A| = 10$ e $|B| = 4$. Inoltre $|A \cup B| = 13$ perché $21 \in A \cap B$.
Segue che il numero di sottoinsiemi che soddisfano la condizione data sono

$$\binom{13}{2}\binom{17}{2}$$

perché dobbiamo scegliere due elementi nell'insieme $A \cup B$ e quindi abbiamo $\binom{13}{2}$ scelte, e a ognuna di queste dobbiamo aggiungere due elementi presi nell'insieme $E \setminus A \cup B$ che sceglieremo in $\binom{17}{2}$ modi.

♣

Esercizio 4. Risolvere l'equazione in $x \in \mathbb{N}$

$$\binom{x}{3} - \binom{x}{5} = 0.$$

Soluzione. Poniamoci nel caso in cui consideriamo sensato il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ solo quando $n \geqslant k$. Si ha

$$\binom{x}{3} - \binom{x}{5} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} - \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!} = \frac{-x(x-1)(x-2)(x^2-7x-8)}{5!}$$

che ha soluzioni 0, 1, 2, -1 e 8. Ma di queste possiamo accettare solo l'ultima (oppure accettiamo anche 0, 1 e 2 se consideriamo la definizione di coefficiente binomiale estesa anche al caso $n < k$). ♣

Diamo ora la soluzione dell'esercizio sul calcolo combinatorio che stato assegnato durante l'Esercitazione n° 5.

Esercizio. Sia A un insieme di cardinalità 7 e $B, C \subset A$ tali che $|B| = 2$ e $|C| = 3$. Calcolare:

(a) Il numero di sottoinsiemi di A disgiunti da B.

(b) Il numero di sottoinsiemi di A che contengono B.

(c) Il numero di sottoinsiemi di A che hanno in comune esattamente un elemento con B.

(d) Il numero di sottoinsiemi di A che hanno in comune esattamente 2 elementi con C.

Soluzione.

(a) Poniamo $D = A \smallsetminus B$. Avremo $|D| = 5$. Quindi il numero cercato coinciderà con $|\mathcal{P}(D)| = 2^5 = 32$.

(b) Se consideriamo $\mathcal{P}(D)$ e ad ogni suo elemento aggiungiamo i due elementi di B otteniamo tutti i sottoinsiemi cercati che saranno quindi ancora $2^5 = 32$.

(c) Otteniamo il numero considerando $\mathcal{P}(D)$ e aggiungendo ad ogni elemento il primo elemento di B e poi riconsiderando $\mathcal{P}(D)$ aggiungendo il secondo elemento di B. Avremo in totale $2^5 + 2^5 = 2^6 = 64$ elementi.

(d) Poniamo ora $\bar{D} = A \smallsetminus C$. Avremo $\left|\bar{D}\right| = 4$ e $\left|\mathcal{P}(\bar{D})\right| = 2^4 = 16$ elementi.

Si ha che $\binom{3}{2}$ è il numero di sottoinsiemi di C con due elementi. Quindi stavolta ai 16 elementi di $\mathcal{P}(\bar{D})$ aggiungiamo due elementi di C in tutti i modi e quindi il numero cercato sarà

$$\binom{3}{2} \cdot 2^4 = 48.$$

♣